Решения задач

8 класс

1. *Ответ:* 38 или 137.

При сложении двух цифр разряда единиц возможны две ситуации: либо их сумма не больше 9, либо не меньше 10. В первом случае переноса единицы в разряд десятков не происходит, так что сумма единиц равна 3, а сумма десятков 8, поэтому после перестановки цифр искомая сумма будет 38 (пример: $11 + 72 = 83,\ 11 + 27 = 38$). Во втором случае происходит перенос единицы в разряд десятков, так что сумма единиц равна 13, а сумма десятков 7, поэтому после перестановки цифр искомая сумма будет 137 (пример: $16 + 67 = 83,\ 61 + 76 = 137$).

2. *Ответ:* Петя.

Из условия следует, что Вася пробежал дистанцию за время $t_1 = \frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}$, Петя — за время $t_2 = \frac{1}{v_2} + \frac{2}{v_3}$, а Коля — за время $t_3 = \frac{1}{v_3} + \frac{2}{v_1}$. Из неравенства $v_1 > v_2 > v_3$ следует, что $\frac{1}{v_1} < \frac{1}{v_2} < \frac{1}{v_3}$, поэтому

$$t_1 = \frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} < \frac{1}{v_2} + \frac{2}{v_3} = t_2,$$

$$t_3 = \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1} < \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = t_2.$$

Таким образом, Петя потратил больше остальных времени на преодоление дистанции, поэтому он и пришел к финишу последним.

3. *Ответ:* $a = 1010,\ b = 1008,\ c = 1$.

Поскольку набор чисел не поменялся, то не поменялась и их сумма, то есть

$$a + b + c = (a - 2) + (b + 2) + c^2 \Rightarrow c = c^2.$$

Отсюда следует, что либо $c = 0$, либо $c = 1$. Кроме того, раз $c = c^2$, то $a = b + 2$ (a не может совпасть с $a - 2$) и $b = a - 2$. Следовательно, исходный набор чисел либо $b+2,\ b,\ 0$, либо $b+2,\ b,\ 1$. Но в первом случае сумма чисел набора $(b + 2) + b + 0 = 2b + 2$ есть четное число, поэтому не может быть равна 2019. Значит исходный набор $b + 2,\ b,\ 1$, откуда $(b + 2) + b + 1 = 2019,\ b = 1008,\ a = 1010$.

4. *1-й способ:* Проведем в треугольнике ABC медиану CK (рис. 1). Поскольку треугольник равнобедренный, то CK является в нем также биссектрисой и высотой. Отсюда и из того, что угол ACB прямой, следует равенство углов MAK, KBL, MCK и KCL, а также равенство отрезков AK, KB и CK. Тогда треугольники KMC и KLB равны по двум сторонам ($CM = BL,\ KC = KB$) и углу между ними, поэтому $MK = KL$ (значит, треугольник KLM — равнобедренный) и $\angle MKC = \angle LKB$.

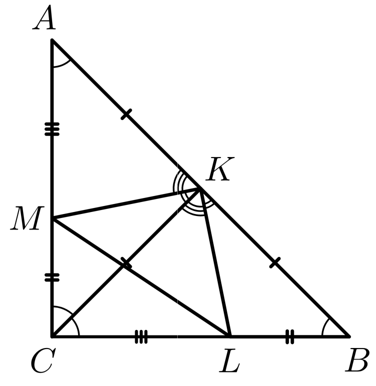

Рис. 1

Треугольники KAM и KCL тоже равны по двум сторонам ($AM = CL,\ AK = CK$) и углу между ними, поэтому $\angle AKM = \angle CKL$. Значит, угол MKL равен половине развернутого угла AKB, то есть $90°$, ч. и т. д.

2-й способ: Аналогично 1-му способу доказываем, что $AK = KC = KB$ и что CK перпендикулярна AB. Рассмотрим теперь поворот плоскости вокруг точки K против часовой стрелки на $90°$. Поскольку $AK = KC$ и $\angle AKC = 90°$, то точка A переходит в точку C. Аналогично точка C переходит в точку B. Отсюда следует, что отрезок AC переходит в отрезок CB. Значит точка M переходит в некоторую точку отрезка CB, а поскольку поворот сохраняет расстояния между точками, то M перейдет в такую точку M' отрезка BC, что $BM' = CM = BL$, то есть M перейдет в L. Тогда $KM = KL$ и $\angle MKL = 90°$, ч. и т. д.

5. *Ответ:* Успели, 13 участников.

Пусть помимо двух выбывших участников в турнире участвовало еще n человек. Каждый из этих n участников встречался с каждым из оставшихся $n-1$ по одному разу, поэтому всего партий между ними было $\frac{n(n-1)}{2}$ (делим на 2, поскольку каждая партия посчитана по одному разу для каждого ее участника, то есть 2 раза). Тогда общее количество проведенных партий на момент окончания турнира равно $\frac{n(n-1)}{2} + 10$, если выбывшие из турнира участники не встречались между собой, и равно $\frac{n(n-1)}{2} + 9$ в противном случае. Отсюда $n(n-1) = 108$ или $n(n-1) = 110$. Но из этих двух уравнений только второе имеет натуральное решение: $11 \cdot 10 = 110$. Значит, выбывшие участники успели встретиться между собой, а общее количество участников на момент начала турнира равно $11 + 2 = 13$.

9 класс

1. *Ответ:* Да.

Пусть в числе m четверок и n семерок. Тогда сумма цифр числа равна $s = 4m+7n$. По признаку делимости на 9 сумма s также делится на 9.

Если число состоит из 2019 цифр, то $m + n = 2019$, откуда $s = 3n + 4(m + n) = 3n + 4 \cdot 2019 = 3(n + 4 \cdot 673)$. Поскольку s делится на 9, то $n + 4 \cdot 673$ должно делится на 3. Подходит $n = 2$, и тогда $m = 2017$. Действительно, в этом случае $s = 4 \cdot 2017 + 14 = 4 \cdot 2016 + 18$ делится на 9, а значит и само число делится на 9. Таким образом, любое натуральное число, состоящее из 2017 четверок и 2 семерок удовлетворяет условию.

2. *Ответ:* $x = 3$.

Заметим, что

$$2 + \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = 2 + \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)} = 2 + \frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{(1+x)-1} =$$

$$= 2 + (\sqrt{1+x}-1) = \sqrt{1+x}+1,$$

поэтому

$$\frac{x}{2+\dfrac{x}{2+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}}} = \frac{x}{2+\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \sqrt{1+x}-1,$$

и уравнение приводится к виду $\sqrt{1+x} = 2$, откуда $x = 3$.

3. *Ответ:* Не существуют.

Предположим, что существуют. Пусть x_0 — общий корень многочленов. Тогда $px_0^{2019} - qx_0 + 1 = 0$ и $qx_0^{2019} - px_0 + 1 = 0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$(p-q)x_0^{2019} + (p-q)x_0 = 0 \Rightarrow (p-q)x_0(x_0^{2018}+1) = 0.$$

По условию $p \neq q$, а $x_0^{2018} + 1 \geqslant 1$, поэтому полученное равенство может иметь место только при $x_0 = 0$. Но 0 не является корнем ни одного из двух многочленов — противоречие.

4. *Ответ:* $90°$.

1-й способ: Пусть M — середина AD (рис. 2). Тогда

$$MH = MD - HD = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}AD = HD,$$

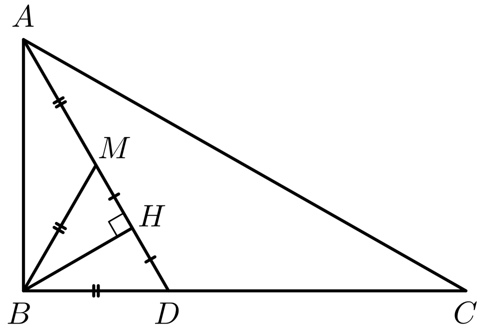

Рис. 2

то есть в треугольнике MBD отрезок BH одновременно является медианой и высотой, поэтому треугольник MBD равнобедренный и $BM = BD = \frac{1}{2}AD$. Значит, BM — медиана треугольника ABD, равная половине стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник ABD — прямоугольный с прямым углом ABD, а значит и треугольник ABC прямоугольный. Прямой угол в нем является наибольшим.

2-й способ: Пусть $HD = x$, тогда $BD = 2x$ и $AH = 3x$. Пользуясь теоремой Пифагора, получаем:

$$BH^2 = BD^2 - HD^2 = 3x^2,\ AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12x^2.$$

Заметим теперь, что $AB^2 + BD^2 = 16x^2 = AD^2$. Значит, по обратной теореме Пифагора треугольник ABD — прямоугольный с прямым углом ABD.

5. *Ответ:* 8.

Из условия следует, что первый кадет выполнил $6n$, второй — $3n$, а третий — $2n$ заданий, где n — натуральное число. Всего ими было выполнено суммарно $11n$ заданий. Каждое задание было кем-то выполнено, поэтому $11n \geqslant 25$, откуда $n \geqslant 3$. С другой стороны, по условию есть задание, выполненное только вторым кадетом, и есть задание, выполненное только третьим кадетом, значит, первый кадет выполнил не более 23 заданий, поэтому $6n \leqslant 23$, откуда $n \leqslant 3$. Значит, $n = 3$, то есть всего кадетами было выполнено суммарно 33 задания. Поскольку каждое из 25 заданий было выполнено хотя бы одним из кадетов, и ни одно задание не было выполнено одновременно всеми тремя, значит, $33 - 25 = 8$ — это количество заданий, выполненных одновременно двумя кадетами.

10 класс

1. *Ответ:* Нет.

Пусть a, b, c — первая, вторая и третья цифры числа M соотвественно. Тогда

$$M - N = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c) = 3^2 \cdot 11(a - c).$$

Если $M - N$ является квадратом, то в его разложении на простые множители число 11 должно встречаться четное число раз, поэтому из равенства выше следует, что $a - c$ делится на 11. Но a и c — цифры, поэтому их разность не превосходит по модулю 9, так что делиться она может на 11 только в том случае, когда $a = c$. Но тогда $M - N = 0$ — не является квадратом *натурального* числа.

2. *Ответ:* $-\frac{1}{2019}$.

Пусть x_0 — общий корень этих многочленов. Тогда $ax_0^3 + 2018ax_0^2 + 1 = 0$ и $2018ax_0^3 + ax_0^2 + 1 = 0$. Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$2017ax_0^3 - 2017ax_0^2 = 0 \Rightarrow 2017ax_0^2(x_0 - 1) = 0,$$

откуда либо $a = 0$, либо $x_0 = 0$, либо $x_0 = 1$. В случае $a = 0$ многочлены вырождаются в константу 1, не имеющую корней, поэтому это невозможно. Случай $x_0 = 0$ также невозможен, поскольку ноль не является корнем ни одного из многочленов. Значит $x_0 = 1$. Подставляя $x_0 = 1$ в исходные равенства, получаем $2019a + 1 = 0$, откуда $a = -\frac{1}{2019}$.

3. *Ответ:* $2^{10} = 1024$.

Поскольку арифметический корень натурального числа не меньше 1, то и все n целых частей в левой части уравнения не меньше единицы. Значит, чтобы левая часть была в точности равна $n + 1$, необходимо, чтобы одна из целых частей была равна 2, а остальные 1. При этом при увеличении n выражение $\left[\sqrt[10]{n}\right]$ не убывает, поэтому двойке должна быть равна наибольшая из целых частей, то есть $\left[\sqrt[10]{n}\right] = 2$, а $\left[\sqrt[10]{n-1}\right] = 1$. Отсюда следует, что, с одной стороны, $\sqrt[10]{n} \geqslant 2$, а с другой стороны $\sqrt[10]{n-1} < 2$, откуда $2^{10} \leqslant n < 2^{10} + 1$, то есть подходит только $n = 2^{10} = 1024$.

4. *Ответ:* $36^\circ,\ 36^\circ,\ 108^\circ$.

Пусть центр I вписанной в треугольник ABC окружности и центр O описанной окружности симметричны относительно AC (рис. 3). Тогда OI — серединный перпендикуляр к AC (по свойству центра описанной окружности), причем отрезки OI и AC делятся точкой пересечения пополам. Значит $AICO$ — ромб, откуда $\angle IAC = \angle ICA = \angle CAO = \angle ACO = \alpha$. Далее, AI и CI — биссектрисы треугольника ABC, поэтому из равенства углов IAC и ICA следует равенство $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный, и точки $O,\ I,\ B$ лежат на одной прямой.

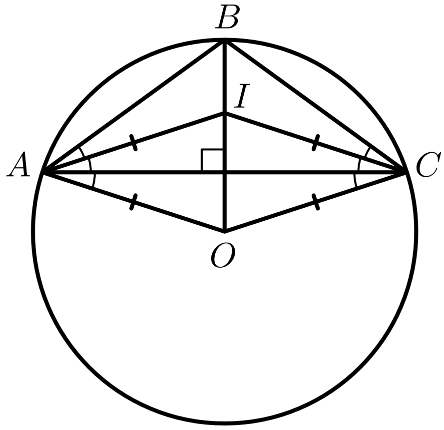

Рис. 3

В равнобедренном треугольнике AOB: $\angle ABO = \angle BAO = 3\alpha$. С другой стороны, $\angle ABO = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$. Отсюда $3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$, $\alpha = 18^\circ$. Значит, углы треугольника равны 36°, 36°, 108°.

5. *Ответ:* $n = 2$ и $n = 3$.

Сложив равенства системы, получим

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 6.$$

Предположим, что все x_i положительны. Применим тогда к каждой скобке левой части полученного равенства известное неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{n} = 2n.$$

Значит $2n \leqslant 6$, откуда $n \leqslant 3$. Остается рассмотреть случаи $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

Случай $n = 1$ невозможен, поскольку из первого равенства системы следует, что $x_1 = 3$, а из второго, что $x_1 = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

По теореме Виета решения этой системы являются корнями квадратного уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$. Его корни $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ оба положительны, значит случай $n = 2$ удовлетворяет условию.

Наконец, рассмотрим случай $n = 3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 3 \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ является решением системы в положительных числах, значит $n = 3$ тоже удовлетворяет условию.

11 класс

1. *Ответ:* 175.

Поскольку число делится на 5, то его последняя цифра либо 5, либо 0. Но 0 быть не может, поскольку тогда произведение цифр равно 0. Значит, последняя цифра числа есть 5.

Пусть m — первая цифра числа, а n — вторая его цифра. Тогда из условия следует, что

$$100m + 10n + 5 = 25mn \Rightarrow 20m + 2n + 1 = 5mn \Rightarrow 2n + 1 = 5m(n - 4).$$

Из последнего равенства следует, что $2n + 1$ делится на 5. Перебирая все цифры, убеждаемся в том, что подходят только $n = 2$ и $n = 7$. Но если $n = 2$, то тогда $5 = -10m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$, что невозможно. Если же $n = 7$, то $15 = 15m \Rightarrow m = 1$. Таким образом, 175 — единственное число, удовлетворяющее условию.

2. *Ответ:* $P(x) = x^2 + 2019x$.

Если степень многочлена $P(x)$ равна n, то степень $P(P(x))$ равна n^2, а степень $(x^2 + 2019x + 2019)P(x)$ равна $n + 2$. Значит $n^2 = n + 2$, откуда $n = 2$, то есть $P(x)$ — квадратный трехчлен.

Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Из равенства $P(P(x)) = (x^2 + 2019x + 2019)P(x)$ следует, что многочлен $P(P(x))$ делится на многочлен $P(x)$ без остатка. С другой стороны, $P(P(x)) = aP^2(x) + bP(x) + c = P(x)(aP(x) + b) + c$, то есть остаток от деления $P(P(x))$ на $P(x)$ равен c. Значит, $c = 0$. Тогда

$$P(x)(aP(x) + b) = (x^2 + 2019x + 2019)P(x) \Rightarrow aP(x) + b = x^2 + 2019x + 2019 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + abx + b = x^2 + 2019x + 2019,$$

откуда $b = 2019,\ a = 1$.

3. *Ответ:* 1999000.

Перепишем равенство $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1$ в виде $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + 1$ и введем замену $b_n = x_{n+1} - x_n$. Тогда $b_1 = x_2 - x_1 = 1$ и $b_{n+1} = b_n + 1$, то есть b_n — арифметическая прогрессия с первым членом 1 и разностью 1. Общий член этой прогрессии $b_n = 1 + 1 \cdot (n - 1) = n$. Кроме того,

$$x_{n+1} = x_n + b_n = x_{n-1} + b_{n-1} + b_n = \ldots = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n,$$

то есть x_{n+1} есть сумма n членов арифметической прогрессии b_n. Тогда

$$x_{n+1} = \frac{b_1 + b_n}{2} \cdot n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Подставляя $n = 1999$, получаем $x_{2000} = \frac{1}{2} \cdot 1999 \cdot 2000 = 1999000$.

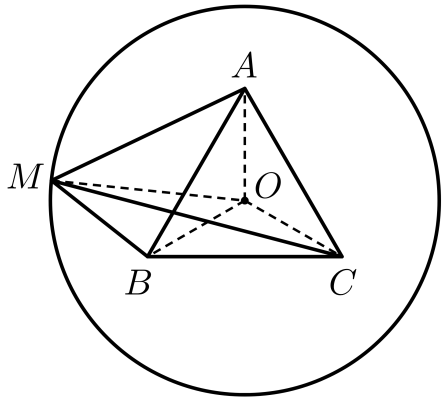

Рис. 4

4. *Ответ:* 4.

Выразим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ (рис. 4):

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Поскольку O — центр равностороннего треугольника ABC, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, а сами отрезки OA, OB и OC являются радиусами описанной около ABC окружности, поэтому $OA = OB = OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка O также является центром окружности условия задачи, поэтому $MO = 1$. В итоге

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 = 4.$$

5. *Ответ:* 9.

Пусть Ф, Н, А — количество учеников, изучающих французский, немецкий и английский соответственно. Обозначим также Д количество учеников, изучающих два языка. Тогда из условия задачи следует, что

$$\text{Н} = k\text{Ф},\ \text{А} = k^2\text{Ф},\ \text{Д} = 3\text{Ф}.$$

Заметим теперь, что если просуммировать Ф, Н и А, то ученики, изучающие один язык, будут посчитаны один раз, а ученики, изучающие два языка, будут посчитаны два раза, поэтому

$$\text{Ф} + \text{Н} + \text{А} = 30 + \text{Д}.$$

Учитывая условия задачи, получаем

$$\Phi + k\Phi + k^2\Phi = 30 + 3\Phi \Rightarrow (k-1)(k+2)\Phi = 30.$$

Отсюда следует, что $(k-1)$ и $(k+2)$ — натуральные делители числа 30, отличающиеся на 3. У числа 30 две пары таких делителей: либо 2 и 5, либо 3 и 6. Но вторая пара не подходит, поскольку 30 не делится на их произведение. Значит это 2 и 5, откуда $k = 3$. Тогда $\Phi = 3$ и $Д = 9$.